Автоматика и телемеханика, № 5, 2023

Управление в социально-экономических системах

© 2023 г. **Г.И. АЛГАЗИН**, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru),
Д.Г. АЛГАЗИНА, канд. техн. наук (darya.algazina@mail.ru)
(Алтайский государственный университет, Барнаул)

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ДИНАМИКИ РЕФЛЕКСИВНОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ В МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Рассматривается модель олигополии Курно с произвольным числом рациональных агентов в условиях неполной информации для классического случая линейных функций издержек и спроса. В рамках динамической модели рефлексивного коллективного поведения каждый агент в каждый момент времени корректирует свой объем выпуска, делая шаг в направлении выпуска, максимизирующего его прибыль при ожидаемом выборе конкурентов. Обсуждается применение матриц перехода погрешностей динамики к исследованию условий ее сходимости к равновесию Курно–Нэша. Показаны эффекты от введения ограничений на диапазоны шагов агентов в устранении неопределенности о сходимости динамики. Предложен метод определения максимальных диапазонов шагов, гарантирующих сходимость динамики коллективного поведения для произвольного числа агентов.

Ключевые слова: олигополия Курно, неполная информированность, рефлексивное коллективное поведение, матрица перехода погрешностей, диапазоны шагов, условия сходимости.

DOI: 10.31857/S0005231023050045, **EDN:** AGBJSH

1. Введение

Значительное число математических работ, исследующих динамику коллективного поведения на конкурентных рынках, посвящено выявлению условий ее сходимости к равновесию Нэша (см., например, [1–9]). Данные исследования нельзя считать завершенными даже для случая модели олигополии Курно с линейными функциями затрат и спроса [4, 5, 10]. Настоящая статья посвящена именно такому случаю модели олигополии.

В рамках модели рефлексивного коллективного поведения каждый агент независимо от других корректирует свой объем выпуска выбором шага в направлении движения к своей текущей цели [11, 12]. Известно, что динамика коллективного поведения сходится к рыночному равновесию, если каждый агент корректирует свои действия малыми шагами (см., например, [13–15]).

Также если каждый агент всегда делает максимально допустимый шаг (т.е. выбирает свой наилучший ответ на ожидаемые действия конкурентов), то динамика сходится только для рынка, состоящего из двух агентов. Для рынков с числом агентов больше двух такая динамика коллективного поведения расходится [13, 14].

В настоящей статье развивается подход, основанный на использовании норм матриц перехода погрешностей динамик коллективного поведения, к исследованию условий сходимости динамик на рынках олигополии в классе линейных функций [16]. В рамках этого подхода проблема неопределенности о сходимости динамик усиливается в том случае, когда при выборе величин шагов агенты могут действовать разнонаправлено: выбирать «большие» шаги движения к своим текущим целям или, наоборот, «малые» шаги.

В данной статье ставится задача поиска ограничений на диапазоны допустимых откликов агентов, которые формулируются как условия, гарантирующие сходимость к равновесию динамики коллективного поведения в линейной модели Курно с произвольным числом агентов.

2. Формальная постановка задачи исследования

В качестве базовой рассматривается модель олигополии Курно, которая состоит из конкурирующих объемами выпуска однородной продукции агентов с целевыми функциями

$$\Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi(q_i) \to \max_{q_i}, \tag{1}$$

линейными функциями затрат

$$\phi_i(q_i) = c_i q_i + d_i \tag{2}$$

и линейной обратной функцией спроса

$$p(Q) = a - bQ. \tag{3}$$

Здесь: $i \in N = \{1, \dots, n\}$, q_i — выпуск i-го агента, $Q = \sum_{i \in N} q_i$ — суммарный объем выпуска всеми агентами, c_i, d_i — предельные и постоянные издержки i-го агента соответственно, $p(Q)$ — единая рыночная цена, a, b — параметры спроса. Полагается, что весь выпуск реализуется, ограничения мощности и коалиции отсутствуют. Состояние рынка в момент времени t $(t = 0, 1, 2, \dots)$ задается n-мерным вектором $q^t = (q_1^t, \dots, q_i^t, \dots, q_n^t)$.

Определим базовый процесс, когда смена состояний рынка удовлетворяет аксиоме индикаторного поведения [13] — в каждый момент времени $(t+1)$ каждый агент наблюдает объемы выпуска всех агентов, выбранные ими в предыдущий момент времени t и корректирует свой выпуск, делая шаг в направлении текущего положения цели согласно следующей итерационной процедуре:

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), \quad i \in N. \tag{4}$$

Здесь $\gamma_i^{t+1} \in [0;1]$ — параметр, независимо выбираемый каждым i-м агентом, определяет величину его шага к текущему положению своей цели. Агент может делать полный шаг, полагая $\gamma_i^{t+1} = 1$, тем самым выбирая свой наилучший ответ, «оставаться на месте», выбирая $\gamma_i^{t+1} = 0$, или делать «неполный шаг», если $\gamma_i^{t+1} \in (0;1)$.

Текущее положение цели i-го агента $x_i(q_{-i}^t)$ — это такой его объем выпуска, который максимизировал бы собственную целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же объемы выпуска, что и в предыдущий [13, 17]. Здесь $q_{-i}^t = (q_1^t, \ldots, q_{i-1}^t, q_{i+1}^t, \ldots, q_n^t)$ — обстановка i-го агента, вектор объемов выпуска всех агентов в момент времени t за исключением i-го агента. Известно, что (см., например, [14–16])

$$x_i(q_{-i}^t) = \frac{h_i - \sum_{j \neq i} q_j^t}{2} = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2}. \tag{5}$$

Здесь: $h_i = \frac{a - c_i}{b}$, $Q_{-i}^t = \sum_{j \neq i} q_j^t$ — суммарный выпуск «окружением» i-го агента $(i, j \in N)$.

Агенты точно знают собственные затраты и целевую функцию, собственную функцию реакции $x_i(q_{-i}^t)$, включая параметры спроса a и b ранее произведенный выпуск другими агентами, но не располагают достоверной информацией относительно их ожидаемых объемов выпуска, множеств допустимых действий, функций затрат и целевых функций.

Предполагаем, что в модели олигополии (1)–(3), как в игре в нормальной форме, равновесие $q^* = (q_1^*, \ldots, q_i^*, \ldots, q_n^*)$, понимаемое как статическое равновесие Нэша, существует и все агенты конкурентоспособны в равновесии, т.е. $q_i^* > 0 \ \ \forall i \in N$. В случае линейных издержек агентов и линейного спроса статическое равновесие существует и единственно.

Равновесие динамики коллективного поведения (4), (5) является статическим равновесием q^* в модели олигополии (1)–(3), но не всегда достижимо. Условия сходимости динамики относятся к параметрам γ_i^{t+1}, числу агентов на рынке и начальным приближениям $q^0 = (q_1^0, \ldots, q_i^0, \ldots, q_n^0)$. Полагаем также, что $q^0 > 0$.

В данной работе обсуждаются новые аспекты подхода к исследованию сходимости моделей динамики коллективного поведения, основанного на использовании нормы матрицы перехода погрешностей от t-го к $(t+1)$-му моменту времени в итерационном процессе (4), (5). Для линейной модели олигополии подход дает простой критерий сходимости по норме матрицы: она должна быть меньше единицы начиная с некоторого момента времени [16]. Когда агенты независимо друг от друга выбирают шаги в диапазоне $[0;1]$, то критерий по норме, за исключением дуополии, не может быть выполнен. Основная задача статьи для изучаемой прикладной линейной модели олигополии с произвольным числом рациональных агентов — для заданного числа агентов получение диапазонов величин их шагов, при которых выполняется критерий по норме. Тогда при любых начальных приближениях q^0 будет гарантирована сходимость модели динамики коллективного поведения (4), (5) к равновесию, которое является статическим равновесием Нэша в модели олигополии (1)–(3). Также не меньший интерес представляет решение задачи поиска максимальных таких диапазонов шагов.

3. Методы исследования

Следуя работе [16], приведем формальные выражения для норм матриц перехода погрешностей в итерационном процессе (4), (5) для базовой модели олигополии, а также известные результаты о сходимости процесса, основанные на использовании норм.

Погрешность итерационного процесса $\varepsilon^{t+1} = (\varepsilon_1^{t+1}, \varepsilon_2^{t+1}, \ldots, \varepsilon_n^{t+1})^T = (q_1^{t+1} - q_1^*, q_2^{t+1} - q_2^*, \ldots, q_n^{t+1} - q_n^*)^T$ определяется преобразованием $\varepsilon^{t+1} = B^{t+1}\varepsilon^t$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, где B^{t+1} матрица перехода (пересчета, преобразования) погрешностей от t-го к $(t+1)$-му моменту времени

$$B^{t+1} = B(\gamma^{t+1}) = \begin{pmatrix} 1-\gamma_1^{t+1} & -\gamma_1^{t+1}/2 & \ldots & -\gamma_1^{t+1}/2 \\ -\gamma_2^{t+1}/2 & 1-\gamma_2^{t+1} & \ldots & -\gamma_2^{t+1}/2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\gamma_n^{t+1}/2 & -\gamma_n^{t+1}/2 & \ldots & 1-\gamma_n^{t+1} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\gamma^{t+1} = (\gamma_1^{t+1}, \ldots, \gamma_i^{t+1}, \ldots, \gamma_n^{t+1})$.

Сходимость итерационного процесса (4), (5) означает, что $\varepsilon^t \to 0$ по евклидовой норме при $t \to \infty$ и полностью определяется матрицей B^{t+1}. Евклидова норма вектора ε определяется по формуле $\|\varepsilon\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2}$. Последовательность векторов $\{q^t\}_{t=0}^\infty$ сходится к равновесию q^* по норме при $t \to \infty$ будем записывать как $q^t \to q^*$. Норма вещественной матрицы B, имеющей n строк и n столбцов, является подчиненной евклидовой векторной норме и определяется как $||B|| = \max\limits_{\|\varepsilon\|=1} \|B\varepsilon\|$. Из определения нормы следует, что $\|B\varepsilon\| < \|B\|\|\varepsilon\|$ для всех B, ε или $\|B\varepsilon\| < \|B\|$ для всех B, $\|\varepsilon\| = 1$ [18, 19].

Тогда [16]

$$\|B^{t+1}\| = \max_{\|\varepsilon\|=1} \|B(\gamma^{t+1})\varepsilon\| = \max_{\|\varepsilon\|=1} \sqrt{\sum_{i\in N} \left[\varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i + \sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\right]^2}, \tag{7}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n)$ — произвольный единичный вектор. В (7) опущен верхний индекс «t» для компонент вектора ε, как не влияющий на результат.

В терминах нормы матрицы B^{t+1} можно привести следующие результаты о сходимости итерационного процесса [16].

Лемма 1. Для сходимости к равновесию процесса (4), (5) *при любом начальном приближении* q^0 *достаточно начиная с некоторого момента* t_0 *выполнения условия*

$$\|B^{t+1}\| < 1. \tag{8}$$

Требование неотрицательности текущих выпусков агентов, возникающее, например, с точки зрения экономических ограничений, может быть реализовано процессом вида

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \leqslant 0. \end{cases} \tag{9}$$

Утверждение 1. Если начиная с некоторого момента t_0 $\|B^{t+1}\| < 1$, *то процесс* (9), (5) *сходится при любом начальном приближении* q^0.

По этому утверждению если для процесса (4), (5) норма матрицы пересчета погрешностей меньше единицы, то будет сходиться также и процесс (9), (5), в котором не допускаются отрицательные текущие выпуски.

Обозначим через $f(\gamma^{t+1})$ подкоренное выражение в (7), т.е.

$$f(\gamma^{t+1}) = \sum_{i\in N}\left[\varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i + \sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\right]^2. \tag{10}$$

Утверждение 2. Пусть векторы γ^{t+1}, $\overrightarrow{\gamma}^{t+1}$, $\overleftarrow{\gamma}^{t+1}$ *такие, что*

$$\gamma_i^{t+1} \in [\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}; \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}], \quad [\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}; \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}] \subseteq [0;1] \ \text{ и } \ \gamma_i^{t+1} = \alpha_i^{t+1}\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1},$$

где $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0;1]$, $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$, $i \in N$.

Тогда функция $f(\gamma^{t+1})$ *удовлетворяет неравенствам:*

$$\begin{aligned} & f\big(\alpha_1^{t+1}\overrightarrow{\gamma}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}, \ldots, \alpha_i^{t+1}\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}, \ldots \\ & \qquad \ldots, \alpha_n^{t+1}\overrightarrow{\gamma}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_n^{t+1}\big) \leqslant \\ & \leqslant \sum_{y_1\in\{\alpha_1^{t+1},\beta_1^{t+1}\}} \cdots \sum_{y_i\in\{\alpha_i^{t+1},\beta_i^{t+1}\}} \cdots \sum_{y_n\in\{\alpha_n^{t+1},\beta_n^{t+1}\}} y_1 \cdot \ldots y_i \cdot \ldots y_n \cdot \\ & \qquad \cdot f\big(z_1^{t+1}, \ldots, z_i^{t+1}, \ldots, z_n^{t+1}\big), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0;1]$, $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$, $z_i^{t+1} = \begin{cases} \overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}, & y_i = \alpha_i^{t+1}; \\ \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}, & y_i = \beta_i^{t+1}. \end{cases}$

$$\begin{aligned} & f\big(\alpha_1^{t+1}\overrightarrow{\gamma}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}, \ldots, \alpha_i^{t+1}\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}, \ldots \\ & \qquad \ldots, \alpha_n^{t+1}\overrightarrow{\gamma}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_n^{t+1}\big) \leqslant \\ & \leqslant \sum_{i\in N}\left\{\alpha_i^{t+1}\left[\varepsilon_i - \frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i + \sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\right]^2 + \beta_i^{t+1}\left[\varepsilon_i - \frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i + \sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\right]^2\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

В левой части неравенства (11) — значение функции $f(\gamma^{t+1})$ во внутренней точке n-мерного прямоугольного параллелепипеда $\big[\overrightarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}; \ldots; \overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}; \ldots; \overrightarrow{\gamma}_n^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_n^{t+1}\big]$, в правой части — специального вида линейная комбинация значений функции $f(\gamma^{t+1})$ в крайних точках параллелепипеда. В частности, для случая $n = 3$ неравенство имеет вид

$$
\begin{gathered}
f\big(\alpha_1^{t+1}\overrightarrow{\gamma}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1}\overrightarrow{\gamma}_2^{t+1} + \beta_2^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_2^{t+1}, \alpha_3^{t+1}\overrightarrow{\gamma}_3^{t+1} + \beta_3^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_3^{t+1}\big) \leqslant \\
\leqslant \alpha_1^{t+1}\alpha_2^{t+1}\alpha_3^{t+1} f\big(\overrightarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overrightarrow{\gamma}_2^{t+1}, \overrightarrow{\gamma}_3^{t+1}\big) + \beta_1^{t+1}\alpha_2^{t+1}\alpha_3^{t+1} f\big(\overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overrightarrow{\gamma}_2^{t+1}, \overrightarrow{\gamma}_3^{t+1}\big) + \\
+ \alpha_1^{t+1}\beta_2^{t+1}\alpha_3^{t+1} f\big(\overrightarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_2^{t+1}, \overrightarrow{\gamma}_3^{t+1}\big) + \alpha_1^{t+1}\alpha_2^{t+1}\beta_3^{t+1} f\big(\overrightarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overrightarrow{\gamma}_2^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_3^{t+1}\big) + \\
+ \beta_1^{t+1}\beta_2^{t+1}\alpha_3^{t+1} f\big(\overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_2^{t+1}, \overrightarrow{\gamma}_3^{t+1}\big) + \beta_1^{t+1}\alpha_2^{t+1}\beta_3^{t+1} f\big(\overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overrightarrow{\gamma}_2^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_3^{t+1}\big) + \\
+ \alpha_1^{t+1}\beta_2^{t+1}\beta_3^{t+1} f\big(\overrightarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_2^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_3^{t+1}\big) + \beta_1^{t+1}\beta_2^{t+1}\beta_3^{t+1} f\big(\overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_2^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_3^{t+1}\big).
\end{gathered}
$$

4. Результаты исследования и их обсуждение

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
&\gamma^{t+1}\big(\beta^{t+1}\big) = \big(\gamma_1^{t+1}\big(\beta_1^{t+1}\big), \ldots, \gamma_i^{t+1}\big(\beta_i^{t+1}\big), \ldots, \gamma_n^{t+1}\big(\beta_n^{t+1}\big)\big), \\
&\gamma^{t+1}\big(\beta^{t+1}\big) = \big(1 - \beta_i^{t+1}\big)\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} \ \big(i \in N\big) \text{ и} \\
&f^{t+1} = f\big(\gamma^{t+1}\big(\beta^{t+1}\big)\big).
\end{aligned}
$$

Идея применения результатов раздела 3 к решению задачи сходимости состоит в следующем.

Для крайней точки параллелепипеда $[\overrightarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}; \ldots; \overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}; \ldots; \overrightarrow{\gamma}_n^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_n^{t+1}]$ формула (12) приводится к виду $f^{t+1} \leqslant 1 - \varepsilon^T F^{t+1}\varepsilon$, где F^{t+1} — симметрическая матрица размера $n \times n$. Если F^{t+1} положительно определена (т.е. $\varepsilon^T F^{t+1}\varepsilon > 0$ для каждого набора действительных чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, не все из которых равны нулю), то для данной крайней точки $f^{t+1} < 1$. Если для всех крайних точек $f^{t+1} < 1$, то по неравенству (11) для любой внутренней точки параллелепипеда будет $f^{t+1} < 1$ и по (7), (10) для нее будет $\|B^{t+1}\| \leqslant \max\limits_{\|\varepsilon\|=1} \sqrt{1 - \varepsilon^T F^{t+1}\varepsilon} < 1$. То есть для всех точек параллелепипеда $\big[\overrightarrow{\gamma}_1^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}; \ldots; \overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}; \ldots; \overrightarrow{\gamma}_n^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_n^{t+1}\big]$ выполняется критерий сходимости (8) для процесса (4), (5). Если у всех агентов одинаковые левые и правые границы диапазонов, то трудоемкость решения данной задачи существенно уменьшается за счет сокращения числа анализируемых крайних точек с 2^n до $(n - 1)$. К тому же современные пакеты компьютерной математики располагают необходимыми средствами для проверки на положительную определенность матриц практически любого размера.

Результаты, представленные в разделе 3, используются и для решения задачи нахождения максимальных диапазонов шагов агентов (параллелепипеда максимального объема), гарантирующих сходимость к равновесию динамики коллективного поведения, что также составляет важный результат данной статьи.

Но вначале остановимся подробнее на предпосылках к ограничению диапазонов шагов агентов. Для этого первым рассмотрим классический диапазон $[\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}] = [0;1]$ $(\forall i \in N; t = 0,1,2,\ldots)$.

Соответствующее этому диапазону неравенство (12) имеет вид

$$f^{t+1} = f(\gamma^{t+1}(\beta^{t+1})) \leqslant 1 - \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1}(\varepsilon_i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} \left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j \right)^2. \tag{13}$$

В (13) использовано, что $\gamma_i^{t+1} = (1 - \beta_i^{t+1}) \cdot 0 + \beta_i^{t+1} \cdot 1 = \beta_i^{t+1}$.

Если симметрическая квадратичная форма

$$\sum_{i \in N} \beta_i^{t+1}(\varepsilon_i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} \left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j \right)^2$$

является положительно определенной для каждого набора действительных чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n$, то это равносильно тому, что она положительно определена для каждого набора действительных чисел таких, что $\sum\limits_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$. Тогда $f^{t+1} < 1$ и по (7), (10) $\|B^{t+1}\| < 1$. Отметим, что $f^{t+1} \geqslant 0$, поскольку $\sum\limits_{i \in N} \beta_i^{t+1}(\varepsilon_i)^2 \leqslant 1$.

Соответствующая данной квадратичной форме симметрическая матрица имеет вид

$$F^{t+1} = F(\gamma^{t+1}(\beta^{t+1})) = \tag{14}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1^{t+1} - \frac{1}{4} \sum\limits_{i \in N \setminus \{1\}} \beta_i^{t+1} & -\frac{1}{4} \sum\limits_{i \in N \setminus \{1,2\}} \beta_i^{t+1} & \ldots & -\frac{1}{4} \sum\limits_{i \in N \setminus \{1,n\}} \beta_i^{t+1} \\ -\frac{1}{4} \sum\limits_{i \in N \setminus \{2,1\}} \beta_i^{t+1} & \beta_2^{t+1} - \frac{1}{4} \sum\limits_{i \in N \setminus \{2\}} \beta_i^{t+1} & \ldots & -\frac{1}{4} \sum\limits_{i \in N \setminus \{2,n\}} \beta_i^{t+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{4} \sum\limits_{i \in N \setminus \{n,1\}} \beta_i^{t+1} & -\frac{1}{4} \sum\limits_{i \in N \setminus \{n,2\}} \beta_i^{t+1} & \ldots & \beta_n^{t+1} - \frac{1}{4} \sum\limits_{i \in N \setminus \{n\}} \beta_i^{t+1} \end{pmatrix}.$$

Используем следующий известный результат (см., например, [19]): действительная квадратичная форма является положительно определенной в том и только в том случае, если определители всех главных (угловых) миноров соответствующей ей матрицы положительны (или, что равносильно, если матрица положительно определена).

Более подробно рассмотрим частные случая рынка, когда $n = 2, 3, 4$.

Вначале рассмотрим хрестоматийный случай — дуополию Курно. Соответствующие неравенство (13) и матрица (14) имеют вид

$$f^{t+1} \leqslant 1-\beta_1^{t+1}(\varepsilon_1)^2+\frac{\beta_1^{t+1}}{4}(\varepsilon_2)^2-\beta_2^{t+1}(\varepsilon_2)^2+\frac{\beta_2^{t+1}}{4}(\varepsilon_1)^2,$$

$$F^{t+1}=\begin{pmatrix} \beta_1^{t+1}-\beta_2^{t+1}/4 & 0 \\ 0 & \beta_2^{t+1}-\beta_1^{t+1}/4 \end{pmatrix}.$$

Если $4\beta_1^{t+1}-\beta_2^{t+1}>0$ и, по симметрии, $4\beta_2^{t+1}-\beta_1^{t+1}>0$, то определители главных миноров матрицы F^{t+1} положительны. Процесс сходится, когда эти неравенства выполнены (т.е. шаг каждого агента больше одной четвертой шага другого) начиная с некоторого момента времени t. В частности, это так, когда $\beta_1^{t+1}=\beta_2^{t+1}=1$, т.е. каждый агент выбирает наилучшие ответы на ожидаемые действия конкурента. Когда агенты действуют разнонаправленно и указанные неравенства не выполняются, вопрос о сходимости по норме остается без ответа, хотя известно, что процесс сходится при $\beta_1^{t+1},\ \beta_2^{t+1}\in(0;1]$.

Для случая олигополии Курно с тремя агентами соответствующие неравенство (13) и матрица (14) имеют вид

$$f^{t+1} \leqslant 1-\beta_1^{t+1}(\varepsilon_1)^2-\beta_2^{t+1}(\varepsilon_2)^2-\beta_3^{t+1}(\varepsilon_3)^2+\frac{\beta_1^{t+1}}{4}(\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2+$$
$$+\frac{\beta_2^{t+1}}{4}(\varepsilon_1+\varepsilon_3)^2+\frac{\beta_3^{t+1}}{4}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2,$$

$$F^{t+1}=\begin{pmatrix} \beta_1^{t+1}-\frac{\beta_2^{t+1}}{4}-\frac{\beta_3^{t+1}}{4} & -\frac{\beta_3^{t+1}}{4} & -\frac{\beta_2^{t+1}}{4} \\ -\frac{\beta_3^{t+1}}{4} & \beta_2^{t+1}-\frac{\beta_1^{t+1}}{4}-\frac{\beta_3^{t+1}}{4} & -\frac{\beta_1^{t+1}}{4} \\ -\frac{\beta_2^{t+1}}{4} & -\frac{\beta_1^{t+1}}{4} & \beta_3^{t+1}-\beta_1^{t+1}-\frac{\beta_2^{t+1}}{4} \end{pmatrix}.$$

Проверено, что для каждого набора действительных чисел $\beta_1^{t+1}, \beta_2^{t+1}, \beta_3^{t+1}$ определитель неположителен, т.е. на основе неравенства (13) не удается подтвердить сходимость процесса. Довольно неожиданный вывод, поскольку известно, что процесс сходится для многих наборов параметров β_i^{t+1}. Такой вывод обусловлен значительной разницей в значениях $\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}=0$ и $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}=1$, агенты могут выбирать любые шаги: от близких к нулю, практически оставаясь «на месте», до максимально возможных, т.е. оптимальных по прибыли.

Также для $n>3$ и классического диапазона шагов $[\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1};\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}]=[0;1]$ не удается подтвердить сходимость процесса ни для одного набора параметров β_i^{t+1}. Отметим, что при равных для всех агентов параметрах β_i^{t+1} матрица F^{t+1} для $n>2$ не является положительно определенной. Достаточно в этом убедиться для какого-либо одного значения параметра. При $n=4$ и равных параметрах уже определитель второго главного минора матрицы отрицателен.

Для преодоления неопределенности в подтверждении гипотезы «процесс сходится» предполагаем ограничивать диапазоны выбора шагов агентами. При определении границ диапазонов будем исходить из того, что для агентов большие шаги часто являются предпочтительнее малых шагов, поэтому правые границы желательно иметь как можно ближе к единице.

В дальнейшем помогут следующие утверждения и леммы, доказательство которых приведено в Приложении.

У т в е р ж д е н и е 3. *В модели олигополии Курно процесс* (4), (5) *сходится для диапазонов шагов* $[\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}; \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}]$, *если начиная с некоторого момента времени* t_0 *положительно определены матрицы* F^{t+1}, *элементы которых имеют вид*

$$f_{ii}^{t+1} = 3(\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}) + \mu_i^{t+1} - \sum_{k \in N} \eta_k^{t+1},$$

$$f_{ij}^{t+1} = (\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}) + (\mu_j^{t+1} - \eta_j^{t+1}) - \sum_{k \in N} \eta_k^{t+1}, \quad i, j \in N, \quad i \neq j. \tag{15}$$

Здесь

$$\mu_i^{t+1} = [\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}(\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} - \overrightarrow{\gamma}_i^{t+1})]/2,$$

$$\eta_i^{t+1} = [(\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1})^2 + \beta_i^{t+1}((\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1})^2 - (\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}))^2]/4, \quad \beta_i^{t+1} \in [0; 1].$$

Л е м м а 2. *Пусть* A *квадратная матрица размера* $m \times m$ *с элементами вида* $a_{ii} = a$, $a_{ij} = b$, $i, j \in M = \{1 \ldots, m\}$, $i \neq j$. *Тогда* $\det(A) = (a-b)^{m-1}[a + b(m-1)]$.

Л е м м а 3. *Матрица* (15) *положительно определена при* $\gamma_i^{t+1} = \overleftarrow{\gamma}^{t+1} < \frac{4}{1+n}$, $i \in N$.

По лемме 3 для случая $n = 2$ имеем $\overleftarrow{\gamma}^{t+1} < \frac{4}{3}$, поэтому процесс придет в равновесие, когда все агенты выбирают максимальные шаги, равные единице. Для случая $n = 3$ должно быть $\overleftarrow{\gamma}^{t+1} < 1$, поэтому не подтверждается сходимость процесса, когда все агенты выбирают максимальные шаги. Для случая $n = 4$ можно подтвердить сходимость процесса только, когда шаги агентов не выходят за правую границу диапазона, равную 0,8.

Рассмотрим снова модель дуополии, но изменим границы диапазона. Положим $\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1} = 0{,}2$ и $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} = 1$, т.е. теперь агенты не могут выбирать «самые маленькие» шаги. По (15) $\mu_i^{t+1} = 0{,}1 + \beta_i^{t+1} 0{,}4, \eta_i^{t+1} = 0{,}01 + \beta_i^{t+1} 0{,}24$, $F^{t+1} = \begin{pmatrix} 0{,}35 + 0{,}64\beta_1^{t+1} - 0{,}24\beta_2^{t+1} & 0{,}16 - 0{,}08\beta_1^{t+1} - 0{,}08\beta_2^{t+1} \\ 0{,}16 - 0{,}08\beta_1^{t+1} - 0{,}08\beta_2^{t+1} & 0{,}35 + 0{,}64\beta_2^{t+1} - 0{,}24\beta_1^{t+1} \end{pmatrix}$. Здесь матрица F^{t+1} положительно определена при β_1^{t+1}, $\beta_1^{t+1} \in [0; 1]$. Положительность определителя первого главного минора очевидна, положительность определителя второго главного минора следует уже из того, что каждый из диагональных элементов больше каждого из недиагональных элементов. Поэтому если агенты выбирают шаги в диапазоне $[\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}; \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}] = [0{,}2; 1]$, то процесс (4), (5) сходится при β_1^{t+1}, $\beta_1^{t+1} \in [0; 1]$. В следующем утверждении для дуополии доказывается в Приложении, что нижняя граница диапазона может быть уменьшена.

Утверждение 4. *Если в дуополии Курно агенты начиная с некоторого момента времени t_0 выбирают шаги в диапазоне γ_1^{t+1}, $\gamma_2^{t+1} \in [0{,}136; 1]$, то матрицы перехода погрешностей F^{t+1} будут положительно определены, $\|B^{t+1}\| < 1$ и процесс (4), (5) сходится.*

Эти выводы согласуется с известными результатами, полученными другими методами [3–5, 14, 15], в том числе экспериментами.

Вернемся к модели олигополии с тремя агентами. Ранее для диапазона $[0; 1]$ не подтвердилась гипотеза «процесс сходится» ни для одного набора параметров β. Теперь изменим диапазон шагов. Положим, что $\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1} = 0{,}6$ и $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} = 1$. Агенты выбирают неравные шаги, пусть $\beta_1^{t+1} = 0{,}4$, $\beta_2^{t+1} = 0{,}5$, $\beta_3^{t+1} = 0{,}6$. По (15) $\mu_1^{t+1} = 0{,}38$; $\eta_1^{t+1} = 0{,}154$; $\mu_2^{t+1} = 0{,}4$; $\eta_2^{t+1} = 0{,}17$; $\mu_3^{t+1} = 0{,}42$; $\eta_3^{t+1} = 0{,}186$; $F^{t+1} = \begin{pmatrix} 0{,}548 & -0{,}054 & -0{,}05 \\ -0{,}054 & 0{,}58 & -0{,}56 \\ -0{,}05 & -0{,}56 & 0{,}612 \end{pmatrix}$. Матрица положительно определена (с большим запасом), т.е. условие сходимости процесса заведомо имеет место при $\gamma_1^{t+1} = 0{,}76$, $\gamma_2^{t+1} = 0{,}8$, $\gamma_3^{t+1} = 0{,}84$.

Для максимального диапазона шагов, гарантирующего сходимость процесса, справедливо

Утверждение 5. *Если в дуополии Курно агенты начиная с некоторого момента времени t_0 выбирают шаги в диапазоне $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1}, \gamma_3^{t+1} \in [0{,}334; 1]$, то матрицы перехода погрешностей F^{t+1} будут положительно определены, $\|B^{t+1}\| < 1$ и процесс (4), (5) сходится.*

Для модели олигополии Курно с четырьмя и более агентами для получения максимальных диапазонов шагов, гарантирующих сходимость процессов коллективного поведения, может быть рекомендован метод, который был использован при доказательстве утверждений 4 и 5 для случаев $n = 2$ и $n = 3$. Суть метода состоит в следующем:

1. Определяется единая для всех агентов и моментов времени t правая граница $\overleftarrow{\gamma}^*$ диапазонов выбора ими шагов. По лемме 2 желаемая максимальная граница определяется из условия $\overleftarrow{\gamma}^* = \min\left\{\frac{4}{1+n}; 1\right\}$ При $n = 2$ имеем $\overleftarrow{\gamma}^* = 1$, при $n = 3$ имеем $\overleftarrow{\gamma}^* = 1$ (для трех агентов сама единица не включается в диапазон), $n = 4 - \overleftarrow{\gamma}^* = 0{,}8$, $n = 5 - \overleftarrow{\gamma}^* = 2/3$ и т.д.

Имеем, что для n агентов в (10) будет $f(\overleftarrow{\gamma}^*, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*) < 1$ (в скобках n-мерный вектор) для каждого набора действительных чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ такого, что $\sum\limits_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$.

2. Определяется единая для всех агентов и моментов t нижняя граница $\overrightarrow{\gamma}^*$

диапазонов шагов. Для этого решаются $(n-1)$ задач на положительную определенность матриц F.

Для набора параметров $(\overrightarrow{\gamma}, \overleftarrow{\gamma}^*, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*)$ положив $\beta_1^{t+1} = 0$ и $\beta_2^{t+1} = \beta_3^{t+1} = \ldots = \beta_n^{t+1} = 1$ определяем матрицу по (15). Пусть $\overrightarrow{\gamma}_{(1)}$ — минимальное значение параметра $\overrightarrow{\gamma}$, при котором матрица положительно определена. Имеем, что $f(\overrightarrow{\gamma}_{(1)}, \overleftarrow{\gamma}^*, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*) < 1$, если $\sum\limits_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$. Также будет $f(\overleftarrow{\gamma}^*, \overrightarrow{\gamma}_{(1)}, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*) < 1$, $f(\overleftarrow{\gamma}^*, \overleftarrow{\gamma}^*, \overrightarrow{\gamma}_{(1)}, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*) < 1$, $\ldots$, $f(\overleftarrow{\gamma}^*, \overleftarrow{\gamma}^*, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*, \overrightarrow{\gamma}_{(1)}) < 1$.

Для набора параметров $(\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\gamma}, \overleftarrow{\gamma}^*, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*)$ при $\beta_1^{t+1} = \beta_2^{t+1} = 0$ и $\beta_3^{t+1} = \ldots = \beta_n^{t+1} = 1$ определяем матрицу по (15). Обозначим через $\overrightarrow{\gamma}_{(2)}$ минимальное значение параметра $\overrightarrow{\gamma}$, при котором матрица положительно определена. Имеем, что $f(\overrightarrow{\gamma}_{(2)}, f\overrightarrow{\gamma}_{(2)}, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*) < 1$, если $\sum\limits_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$. Также будет, что $f(\overrightarrow{\gamma}_{(2)}, \overleftarrow{\gamma}^*, \overrightarrow{\gamma}_{(2)}, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*) < 1$, $f(\overleftarrow{\gamma}^*, \overrightarrow{\gamma}_{(2)}, \overrightarrow{\gamma}_{(2)}, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*) < 1$, $\ldots$, $f(\overleftarrow{\gamma}^*, \overleftarrow{\gamma}^*, \ldots, \overleftarrow{\gamma}^*, \overrightarrow{\gamma}_{(2)}, \overrightarrow{\gamma}_{(2)}) < 1$.

Подобным образом определяются $\overrightarrow{\gamma}_{(3)}, \overrightarrow{\gamma}_{(4)}, \ldots, \overrightarrow{\gamma}_{(n-1)}$.

При определении нижней границы $\overrightarrow{\gamma}_{(n)}$ имеем, что для набора параметров $(\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\gamma}, \ldots, \overrightarrow{\gamma})$ будет $\det(F) = \overrightarrow{\gamma}^n (1+n)(2 - \overrightarrow{\gamma})^{n-1}(2 - (1+n)\overrightarrow{\gamma})$ и матрица F положительно определена, если $\overrightarrow{\gamma} \neq 0$.

Единая нижняя граница диапазонов определяется из условия $\overrightarrow{\gamma}^* = \max\limits_i \{\overrightarrow{\gamma}_{(i)}; i = \overline{1, (n-1)}\}$.

5. Заключение

Один из возможных подходов к аналитическому исследованию условий сходимости динамических процессов коллективного поведения в линейной модели олигополии основан на использовании матриц перехода погрешностей процессов от t-го к $(t+1)$-му моменту времени. С помощью этого подхода предпринята попытка исследовать условия сходимости для модели Курно за счет введения ограничений на диапазоны шагов агентов в направлении их текущих целей. Предложен метод определения максимальных диапазонов шагов, гарантирующих сходимость процессов для произвольного числа агентов. Получаемые диапазоны не зависят от параметров рынка и агентов, но зависят от числа агентов на рынке. Для рынков с двумя и тремя агентами по предложенному методу рассчитаны максимальные диапазоны шагов.

По утверждению 1 если процесс (4), (5) сходится по норме, то в этих диапазонах будет сходиться и процесс (9), (5), в котором в каждый момент времени выполнены условия конкурентоспособности агентов.

Задачи поиска равновесия или условий сходимости ставятся и решаются в рамках других моделей рефлексии (см., например, [20]). Предложенный в статье подход здесь может иметь перспективу для будущих исследований, если поиск решения этих задач приводит к последовательностям типа $\varepsilon^{t+1} \to 0$ и $\varepsilon^{t+1} = B^{t+1}\varepsilon^t$.

Доказательство утверждения 3. Доказательство сводится к преобразованиям правой части (12).

$$\sum_{i\in N}\left\{\left(1-\beta_i^{t+1}\right)\left[\varepsilon_i-\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\beta_i^{t+1}\left[\varepsilon_i-\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\right]^2\right\}=$$

$$=\sum_{i\in N}(\varepsilon_i)^2-\sum_{i\in N}\varepsilon_i\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)+\left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^2\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)^2-$$

$$-\sum_{i\in N}\beta_i^{t+1}\left\{\left[\varepsilon_i-\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\right]^2-\left[\varepsilon_i-\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\right]^2\right\}=$$

$$=1-\sum_{i\in N}\varepsilon_i\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)+\left(\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^2\sum_{i\in N}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)^2-$$

$$-\sum_{i\in N}\beta_i^{t+1}\left[2\varepsilon_i-\left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}+\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\right]\times$$

$$\times\left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}-\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)=$$

$$=1-\sum_{i\in N}2\varepsilon_i\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\left[\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}+\beta_i^{t+1}\left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}-\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i\in N}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)^2\left[\left(\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^2+\beta_i^{t+1}\left(\left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^2-\left(\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^2\right)\right]=$$

$$=1-\sum_{i\in N}2\varepsilon_i\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\mu_i^{t+1}+\sum_{i\in N}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)^2\eta_i^{t+1}=$$

$$=1-2\sum_{i\in N}(\varepsilon_i)^2\mu_i^{t+1}-\sum_{i\in N}2\varepsilon_i\mu_i^{t+1}\sum_{j\in N}\varepsilon_j+$$

$$+\sum_{i\in N}(\varepsilon_i)^2\eta_i^{t+1}+\sum_{i\in N}2\varepsilon_i\eta_i^{t+1}\sum_{j\in N}\varepsilon_j+\sum_{i\in N}\left(\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)^2\eta_i^{t+1}=$$

$$= 1 - \sum_{i\in N}(\varepsilon_i)^2 \left(4\mu_i^{t+1} - 3\eta_i^{t+1} - \sum_{k\in N}\eta_k^{t+1}\right) -$$
$$-\sum_{i\in N}\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\varepsilon_i\varepsilon_j\left[\left(\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}\right) + \left(\mu_j^{t+1} - \eta_j^{t+1}\right) - \sum_{k\in N}\eta_k^{t+1}\right].$$

Если определители главных миноров матрицы (15) положительны, то квадратичная форма $\sum\limits_{i\in N}(\varepsilon_i)^2\left(4\mu_i^{t+1} - 3\eta_i^{t+1} - \sum\limits_{k\in N}\eta_k^{t+1}\right) + \sum\limits_{i\in N}\sum\limits_{i\in N\setminus\{i\}}\varepsilon_i\varepsilon_j\times$ $\times\left[(\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}) + (\mu_j^{t+1} - \eta_j^{t+1}) - \sum\limits_{k\in N}\eta_k^{t+1}\right]$ является положительно определенной и по (7), (10) $\|B^{t+1}\| < 1$. То есть процесс (4), (5) сходится при данных значениях параметров $\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}$.

Утверждение 3 доказано.

Доказательство леммы 2. Будут полезными свойства определителей: 1) определитель не изменится, если к элементам любой строки прибавить соответствующие элементы какой-либо другой, умноженные на одно и то же произвольное число; 2) определитель треугольной квадратной матрицы равен произведению его диагональных элементов.

Прибавлением к элементам каждой строки соответствующих элементов следующей строки, умноженных на (-1), получаем

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & b-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Затем разложением по последней строке с использованием формулы вычисления треугольных определителей имеем $\det(A) = a(a-b)^{m-1} + (m-1)b(a-b)^{m-1} = (a-b)^{m-1}[a + (m-1)b]$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Имеем $\gamma_i^{t+1} = \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}$, при $\beta_i^{t+1} = 1$ и по (15)

$$\mu_i^{t+1} = \frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}, \quad \eta_i^{t+1} = \left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^2,$$
$$f_{ii}^{t+1} = 2\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} - (3+n)\left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^2, \quad f_{ij}^{t+1} = \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} - (2+n)\left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^2,$$
$$i, j \in N, \ i \neq j.$$

По лемме 2 $\det(F^{t+1}) = (1+n)\left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^n \left(2 - \frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^{n-1}\left[2-(1+n)\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right]$. Определитель положителен при $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} < \frac{4}{1+n}$. При выполнении данного неравенства также положителен определитель k-го главного минора матрицы F^{t+1} $(k<n)$. Имеем $a+(k-1)b = \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}\left[2(1+k)-(1+2k+nk)\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}/2\right]/2$. При $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} = \frac{4}{1+n}$ будет $a+(k-1)b = \frac{4(n-k)}{(1+n)^2} > 0$. При $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} < \frac{4}{1+n}$ положительность определителя k-го главного минора очевидна.

Лемма 3 доказана.

Доказательство утверждения 4. При определении границ диапазонов правые границы желательно иметь как можно ближе к единице. Также будем исходить из единого для всех агентов и моментов времени диапазона. Поэтому при f и F будем опускать верхний индекс $(t+1)$.

На основании леммы 2 для дуополии правую границу $\overleftarrow{\gamma}$ диапазона следует взять равной единице и $f(1,1) < 1$.

Рассмотрим $f(\overrightarrow{\gamma};1)$. Соответствующая этой квадратичной форме матрица (15) определяется при $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 1$ и имеет вид $F = \begin{pmatrix} 2\overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 - 0{,}25 & \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 \\ \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & 1 - \overrightarrow{\gamma}^2/4 \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы можно преобразовать к более простому виду $\det(F) = \begin{vmatrix} 3{,}75 & \overrightarrow{\gamma}/2 - 2 \\ \overrightarrow{\gamma}/2 - 2 & 1 - \overrightarrow{\gamma}^2/4 \end{vmatrix}$. Матрица положительно определена, если $\overrightarrow{\gamma} \geqslant 0{,}136$. Поэтому $f(0{,}136;1) < 1$ $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Естественно, что $f(0{,}136;1) = f(0{,}136;1) < 1$

Рассмотрим $f(\overrightarrow{\gamma};\overrightarrow{\gamma})$. Соответствующая матрица (15) определяется при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и имеет вид $F = \begin{pmatrix} 2\overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & \overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 \\ \overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 & 2\overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 \end{pmatrix}$. Матрица положительно определена, если $\overrightarrow{\gamma} \neq 0$. Поэтому $f(0{,}136;0{,}136) < 1$ $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Из (11) следует доказываемое утверждение 4.

Доказательство утверждения 5.

Рассмотрим $f(1;1;\overrightarrow{\gamma})$. Соответствующая этой квадратичной форме матрица (15) определяется при $\beta_1 = \beta_2 = 1$ и $\beta_3 = 0$. Она имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 0{,}75 - \overrightarrow{\gamma}^2/4 & -\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0{,}25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 \\ -\overrightarrow{\gamma}^2/4 & 0{,}75 - \overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0{,}25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 \\ -0{,}25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & -0{,}25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & -0{,}5 + 2\overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы можно преобразовать к более удобному для вычислений виду $\det(F) = \begin{vmatrix} 0{,}75 & -\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0{,}25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 \\ 0 & 0{,}75 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & -0{,}25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2 \\ 0 & -0{,}25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & -0{,}5 + 2\overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 \end{vmatrix}$.
Минимальное значение $\overrightarrow{\gamma}$, для которого матрица F положительно определена, равно 0,334. Поэтому $f(1;1;0{,}334) < 1$ $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Имеем также, что $f(1;1;0{,}334) = f(1;0{,}334;1) = f(0{,}334;1;1) < 1\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Рассмотрим $f(1;\overrightarrow{\gamma};\overrightarrow{\gamma})$. Соответствующая матрица (15) определяется при $\beta_1 = 1$, и $\beta_2 = \beta_3 = 0$. Она имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 1-\overrightarrow{\gamma}^2/2 & \overrightarrow{\gamma}/2-3\overrightarrow{\gamma}^2/4 & \overrightarrow{\gamma}/2-3\overrightarrow{\gamma}^2/4 \\ \overrightarrow{\gamma}/2-3\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0{,}25+2\overrightarrow{\gamma}-5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0{,}25+\overrightarrow{\gamma}-\overrightarrow{\gamma}^2 \\ \overrightarrow{\gamma}/2-3\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0{,}25+\overrightarrow{\gamma}-\overrightarrow{\gamma}^2 & -0{,}25+2\overrightarrow{\gamma}-5\overrightarrow{\gamma}^2/4 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы можно преобразовать к более удобному для вычислений виду $\det(F) = \begin{Vmatrix} 1-\overrightarrow{\gamma}^2/2 & \overrightarrow{\gamma}-3\overrightarrow{\gamma}^2/2 & 1-3\overrightarrow{\gamma}^2/4 \\ \overrightarrow{\gamma}/2-3\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0{,}5+3\overrightarrow{\gamma}-9\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0{,}25+\overrightarrow{\gamma}-\overrightarrow{\gamma}^2 \\ 0 & 0 & \overrightarrow{\gamma}-\overrightarrow{\gamma}^2/4 \end{Vmatrix}$.
Минимальное значение $\overrightarrow{\gamma}$, для которого матрица F положительно определена, равно 0,22. Поэтому $f(1;0{,}22;0{,}22) < 1\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Также $f(0{,}22;1;0{,}22) = f(0{,}22;0{,}22;1) = f(1;0{,}22;0{,}22) < 1\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Рассмотрим $f(\overrightarrow{\gamma};\overrightarrow{\gamma};\overrightarrow{\gamma})$. Соответствующая матрица (15) определяется при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ и имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 2\overrightarrow{\gamma}-3\overrightarrow{\gamma}^2/2 & \overrightarrow{\gamma}-5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & \overrightarrow{\gamma}-5\overrightarrow{\gamma}^2/4 \\ \overrightarrow{\gamma}-5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & 2\overrightarrow{\gamma}-3\overrightarrow{\gamma}^2/2 & \overrightarrow{\gamma}-5\overrightarrow{\gamma}^2/4 \\ \overrightarrow{\gamma}-5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & \overrightarrow{\gamma}-5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & 2\overrightarrow{\gamma}-3\overrightarrow{\gamma}^2/2 \end{pmatrix}.$$

По лемме 2 $\det(F) = \overrightarrow{\gamma}^3(2-\overrightarrow{\gamma}/2)^2(1-\overrightarrow{\gamma})$. Матрица положительно определена, если $\overrightarrow{\gamma} \neq 0{,}1$. Из полученных значений для нижней границы надо выбрать максимальное, т.е. 0,334.

На основании леммы 2 для олигополии с тремя агентами правую границу $\overleftarrow{\gamma}$ диапазона следует брать меньше единицы.

Из (11) следует доказываемое утверждение 5 для диапазона $[0{,}334; 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
2. *Askar S.S., Elettrebybc M.F.* The Impact of Cost Uncertainty on Cournot Oligopoly Games // Appl. Math. Comput. 2017. V. 312. P. 169–176.
3. *Al-Khedhairi A.* Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences // Int. J. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2020. V. 21. P. 339–359.
4. *Elsadany A.A.* Dynamics of a Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality Based on Relative Profit Maximization // Appl. Math. Comput. 2017. V. 294. P. 253–263.
5. *Ueda M.* Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // Appl. Math. Comput. 2019. V. 362. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.049.124535
6. *Fedyanin D.N.* Monotonicity of Equilibriums in Cournot Competition with Mixed Interactions of Agents and Epistemic Models of Uncertain Market // Procedia Computer Science. 2021. V. 186(3). P. 411–417.

7. *Герасъкин М.И.* Анализ равновесий в нелинейной модели олигополии // АиТ. 2022. № 8. С. 140–158.
Geraskin M.I. Analysis of Equilibria in a Nonlinear Oligopoly Model // Autom. Remote Control. 2022. No. 83. P. 1261–1277.
8. *Корепанов В.О.* Управление рефлексивным поведением агентов в модели олигополии Курно // УБС. 2010. Т. 31. С. 225–249.
9. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* О возможности последовательного приближения к равновесию в коалиционной игре при повторении коллективных действий // Экономика и математические методы. 2020. № 4. С. 103–115.
10. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
11. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
12. *Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.* Reflexion in Mathematical Models of Decision-Making // Int. J. Parallel Emerg. Distrib. Syst. 2018. V. 33. No. 3. P. 319–335.
13. *Опойцев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
14. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 345–359.
15. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров // Информатика и автоматизация. 2022. Т. 21. № 2. С. 339–375.
16. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // АиТ. 2022. № 3. С. 84–109.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 367–388.
17. *Малишевский А.В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.
18. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
19. *Белицкий Г.Р., Любич Ю.И.* Нормы матриц и их приложения. Киев: Наукова думка, 1984.
20. *Герасъкин М.И.* Рефлексивный анализ равновесий в игре триполии при линейных функциях издержек агентов // АиТ. 2022. № 3. С. 110–131.
Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents'// Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 389–406.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 07.10.2022

После доработки 02.02.2023

Принята к публикации 15.02.2023